c) En déduire le volume du solide de révolution engendré par la rotation du domaine (D) autour de l'axe des abscisse.

$$\mathcal{V} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\, dx$$

or $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\, dx = \frac{1}{3}$$

Donc $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\, dx = \frac{1}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\, dx$$

$$\mathcal{V} = \pi \cdot \left(\frac{1}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\, dx \right)$$

$$= \frac{\pi}{3} - \pi \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{\pi}{3} - \pi + \frac{\pi^2}{4}$$

$$\mathcal{V} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{2\pi}{3}$$